$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\,\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}X_{i,\sigma(i)}\prod_{i=1}^{n}X_{i,\tau(i)}\right]$$

Khôlles de mathématiques en MPSI 3

Rémi Morvan

remi.morvan@ens-paris-saclay.fr

2020–2021

HARCOVRT 1280

SAINT-LOVIS 1820

Table des matières

Ces exercices sont principalement issus de ressources mises à disposition par Thomas Budzinski, Igor Kortchemski, Michel Quercia, Aliaume Lopez & Alain Troesch sur leurs sites web respectifs, et des TD de Cyril Germain.

Les semaines 21 à 24 ont été victimes de la pandémie.

Semaine 1 : Sommes, produits, coefficients binomiaux & Rappels sur les fonctions

Questions de cours :

- Simplification de $\sum_{k=0}^{n} k$ et factorisation de $a^n - b^n$.
- Formule du binôme.
- Formule d'inversion : si $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$.
- Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de façon unique comme une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(n+m) = f(n)f(m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

1.1 Sommes, produits, coefficients binomiaux

Exercice 1.
Soit $u_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ et $\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} k 2^k \binom{k}{j}$.

Exercice 3.
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 4. ★
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le réel $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0)$ et $P_n(1)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, exprimer $P_n(x)$ en fonction de $P_n(x-1)$.
3. En déduire une expression de $P_n(p)$ sous forme de coefficient binomial lorsque $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. ★
Soit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, appelée *suite de Fibonacci*. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

1.2 Rappels et compléments sur les fonctions

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f est T-périodique pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$. Que dire de f ? Est-ce toujours valable si on suppose que f est T-périodique pour tout $T \in \mathbb{Q}_+^*$?

Exercice 7.
Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Exercice 8.
Soit p une fonction polynomiale. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $\exp \circ p$ est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction polynomiale q_n telle que $(\exp \circ p)^{(n)} = q_n \times \exp \circ p$.

Exercice 9.
On s'intéresse aux fonctions $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x). \tag{1}$$

1. Donner une fonction simple satisfaisant (1).
2. Soit $A = \left\{2^{-2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.
    a. Justifier que $A \subseteq [0,1]$.
    b. Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $x \in A$ ssi $x^2 \in A$.
    c. En déduire une fonction non constante satisfaisant (1).

Exercice 10. ★
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'inégalité suivante, et étudier le cas d'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1 + x^2) \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{k}.$$

Exercice 11 : Formule de Leibniz. ★

1. Soit I un intervalle. Montrer que si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors fg est aussi n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Soient a et b des réels. Retrouver la formule du binôme en calculant de deux façons différentes la dérivée n-ème de la fonction $x \mapsto \exp(ax)\exp(bx)$, définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. ★
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, telle que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que f admet un point fixe.

Semaine 2 : Compléments sur les fonctions & Fonctions circulaires

Questions de cours :

- Deux ou trois formules de trigonométrie relatives aux fonctions sinus, cosinus et tangente, à l'exception des formules du type « $\cos x + \cos y$ ».
- Deux fonctions usuelles à choisir parmi les fonctions sh, ch, th, arcsin et arccos — la fonction arctan n'a pas encore été étudiée. On attend des étudiants qu'ils sachent donner sans démonstration les ensembles de définition et de dérivabilité, la dérivée et l'allure du graphe avec précision de la tangente en 0 et des asymptotes éventuelles.

Exercice 1.

1. Soit $\operatorname{argth} : X \longrightarrow Y$ la bijection réciproque de la tangente hyperbolique. Donner les ensembles X, Y et montrer que argth est dérivable sur X, puis calculer sa dérivée.
2. En cherchant deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, en déduire une expression simple de $\operatorname{argth}(x)$ pour $x \in X$.

Exercice 2.
Déterminer une constante c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{(n+1)^2}\right) \leq c.$$

Exercice 3.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 4 : Inégalité de Huygens.
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$x \leq \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x.$$

Exercice 5 : Tchebychev hyperbolique.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}\ x\ \operatorname{ch}\ y\ +\ \operatorname{sh}\ x\ \operatorname{sh}\ y$.
2. En déduire une formule sur $\operatorname{sh}(x+y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale T_n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\operatorname{ch}\ x) = \operatorname{ch}\ nx.$$

Exercice 6.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que $\text{th}\ x = \frac{2}{\text{th}\ 2x} - \frac{1}{\text{th}\, x}$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} 2^k \text{th}(2^k x)$.

Exercice 7. ★

Soit $f : x \mapsto \ln \circ \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition X de f.
2. Montrer que, pour tout $x \in X$:

$$\text{th}\ \frac{f(x)}{2} = \tan\ \frac{x}{2}, \qquad \text{th}\ f(x) = \sin\ x, \qquad \text{ch}\ f(x) = \frac{1}{\cos\ x} \qquad \text{et} \qquad \text{sh}\ f(x) = \tan\ x.$$

3. Montrer que f est dérivable sur X et calculer sa dérivée.

Exercice 8 : Puissance 4. ★

Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$3x - x^3 \leq 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Semaine 3 : Fonctions circulaires & Nombres complexes

Questions de cours :

— Tracé du graphe des fonctions $\arctan \circ \tan$ et $\arcsin \circ \sin$.
— Inégalité triangulaire sans le cas d'égalité.
— Pour $z = e^{i\theta} = x + iy \in \mathbb{C}^*$, expression de θ selon $\arctan(\frac{y}{x}) \ [2\pi]$.
— Factorisation de $\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

3.1 Fonctions circulaires

Exercice 1.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que le réel $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ est bien défini, et le simplifier.

Exercice 2.
Soit $x \in [-1, 1]$. Résourdre l'équation $2 \arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{6}$ d'inconnue $y \in [-1, 1]$.

Exercice 3. ★

1. Pour $a, b \in [0, 1]$, écrire $\arcsin\ a - \arcsin\ b$ sous la forme $\arcsin\ c$ pour un $c \in [-1, 1]$ bien trouvé.
2. Montrer alors que la limite suivante existe, et la calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \arcsin\left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2\sqrt{k+1}}}\right).$$

3.2 Nombres complexes

Exercice 4.
Soient $u, z \in \mathbb{C}$ tels que $u \neq 1$ et $z \notin \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$ ssi $u \in \mathbb{U}$.

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$ et interpréter géométriquement cette inégalité.

Exercice 6.
Quels sont les $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que $\frac{iz-1}{z-i}$ est réel ? Imaginaire pur ? Sur le cercle unité ?

Exercice 7. ★
Calculer l'intégrale suivante, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n}(t) \cos(2nt) \mathrm{d}t.$$

Exercice 8. ★
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos^{2n}\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Exercice 9.
Étant donné $n \in \mathbb{N}$, calculer :
$$\sum_{k \mid 0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k}.$$

Semaine 4 : Nombres complexes, Décomposition en éléments simples & Intégrales

Questions de cours :

- Résolution de $\omega^n = z$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
- Interprétation géométrique des fonctions $z \mapsto az + b$, lorsque $a, b \in \mathbb{C}$.
- Expression de $\cos 5x$ selon $\cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ puis $\cos \frac{\pi}{5}$.

4.1 Mise en bouche

Exercice 1.
Déterminer les primitives suivantes, sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int^x \sin^3 t \mathrm{d}t.$$

Exercice 2.
Calculer la limite et déterminer la primitive sur un domaine à préciser :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t e^{-t^2} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 2}.$$

Exercice 3.
Déterminer les primitives suivantes, sur un domaine à préciser :

$$\int^x \frac{1}{1 - e^{-t}} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int^x \cos^2 t e^{-t} \mathrm{d}t.$$

4.2 Nombres complexes

Exercice 4.
Soient $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}.$$

Exercice 5.
Résoudre $z + \bar{z} = z^4$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$:

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| \qquad \text{et} \qquad |a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|^2.$$

Indication. Pour l'inégalité, on pourra remarquer que $2a = (a+\omega^k b)+(a-\omega^k b)$ et, symétriquement, $2\omega^k b = (a + \omega^k b) - (a - \omega^k b)$.

Exercice 7 : Racines primitives. ★
Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$ une racine n-ème de l'unité. Montrer que $\{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement si $\omega \notin \mathbb{U}_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Indication. On pourra commencer par remarquer que, si $n, k \in \mathbb{N}^*$, alors $\{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_k = \mathbb{U}_n$ ssi $k = n$.

4.3 Décomposition en éléments simples

Exercice 8.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 9.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}.$$

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}.$$

Semaine 5 : Intégrales, Équations différentielles & Suites récurrentes linéaires

Questions de cours :

— Nada !

5.1 Primitives et intégrales

Exercice 1.
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t + 1}.$$

Exercice 2.
Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ est bien définie et dérivable sur son domaine de définition. Étudier les variations de f.
2. En calculant

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t},$$

pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, montrer que f admet une limite, et la calculer, en 0, 1 et $+\infty$.

Exercice 3.
Pour x dans un intervalle I à déterminer, calculer :

$$\int_0^x \frac{\cos t}{\sin t - \cos t} \mathrm{d}t.$$

Indication. Écrire $\sin t - \cos t$ sous la forme $r \sin(t - \varphi)$ puis remarquer qu'on essaie de primitiver quelque chose qui est presque $\frac{u'}{u}$.

Exercice 4. ★
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{e}{n+2} \leq \underbrace{\int_1^e (\ln t)^n \mathrm{d}t}_{=I_n} \leq \frac{e}{n+1}.$$

Indication. Pour la majoration, faire un changement de variable. Pour la minoration, faire une IPP et remarquer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

5.2 Équations différentielles

Exercice 5.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$.

Exercice 6.
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$ et

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 7.
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Indication. On pourra se ramener à une équation du second ordre.

Exercice 8. ★
Soient $T > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle $y' - ay = \phi$ admet une unique solution T-périodique.

Indication. Écrire, par variation de la constante, les solutions de l'équation, et écrire la condition de T-périodicité.

5.3 Suites récurrentes linéaires

Exercice 9.
Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = n$.

Indication. On pourra commencer par chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme en n.

Exercice 10.
Déterminer les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - y_n \end{cases}$$

Indication. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Semaine 6 : Limite d'une suite

Questions de cours :

- Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ pour A et B des parties majorées non-vide de $\mathbb{R}$.
- Toute suite convergente est bornée.
- Limite d'une somme de suites convergentes.
- Théorème d'encadrement.

6.1 Mise en bouche

Exercice 1.
Soit $\alpha \in \,]-3, +\infty[$. Justifier la bonne définition et étudier la convergence de la suite $\left(\frac{3^n - \alpha^n}{3^n + \alpha^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{n^\alpha + n^\beta}{n^\alpha + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\sqrt[n]{n^2 + \alpha n}\,)_{n \geq n_0}$ soit bien définie. Étudier alors sa convergence.

6.2 Exercices

Exercice 4.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5.
Étudier la convergence des suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n}}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.
Étudier la convergence des suites définies par $u_0 \neq 1$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : Sous-suite monotone.
Montrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Indication. On pourra introduire l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \implies u_m < u_n\}$.

Exercice 8.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $\lim_{n\infty} u_n + v_n = 0$. Que dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que la suite $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(e^{a_n}+e^{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2. Que dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indication. Étudier les suites $(e^{a_n}-a_n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{b_n}-b_n-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 : Théorème de Kleene. ★

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ croissante.

1. On suppose pour tout $X \subseteq [0,1]$ non-vide, $f(\sup X) = \sup f(X)$. Soit la suite x définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que x converge vers un point fixe de f, et que ce point fixe est le plus petit point fixe de f.
2. Exhiber une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ croissante pour laqulle la suite $(f^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers un point fixe de f.

Indication. Pour le contre-exemple, il faut et il suffit de prendre un fonction f pour laquelle on converge vers une discontinuité à gauche. Par exemple $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ si $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = 1$ sinon.

Semaine 7 : Limite d'une suite (bis)

Questions de cours :
- Limite d'un produit de suites convergentes.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$ APCR, avec $\eta \in \left]0,1\right[$, alors $u_n \to 0$. Application à $(\frac{a^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Théorème de la limite monotone dans le cas « croissante majoré ».
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans le cas fini.
- Critère spécial des séries alternées.

7.1 Exercices

Exercice 1.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2.
Étudier la convergence des suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.
1. Déterminer l'ensemble maximal $D \subseteq \mathbb{R}$ tel que la chaque suite définie par $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ soit bien définie.
2. Étudier alors la convergence d'une telle suite.

Exercice 4.
1. Montrer que pour tous $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors B est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q} \setminus (a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_k\mathbb{Z})$ est dense dans $\mathbb{R}$, où $k \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$.

Exercice 5.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq \varepsilon \cdot a_n$$

sont exactement les suites convergeant vers 0.

Exercice 6.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
1. Pour $m \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^m \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{m} \sqrt{k} \leq \int_1^{m+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Étudier la convergence de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\lfloor \sqrt{kx} \rfloor}{n^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. ★
Étudier la convergence des suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+\sqrt{u_n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Indication. Après avoir étudié les variations de $f : x \mapsto \frac{1+u_n}{2+\sqrt{u_n}}$ sur $\mathbb{R}_+$, on pourra montrer qu'elle admet un unique point fixe $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Finalement, on pourra montrer que $[0, x_0]$ et $[x_0, +\infty[$ sont stables par f.

Exercice 8. ★
Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Indication. Après avoir étudié la monotonie de $f : x \mapsto \frac{3}{2x^2+1}$, on pourra montrer que $f \circ f$ admet un point fixe $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et en déduire une propriété sur la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Semaine 8 : Limite d'une suite & Injections, surjections et bijections

Questions de cours :

- Bolzano-Weierstrass complexe à partir de Bolzano-Weierstrass réel.
- Théorème de Cesàro dans le cas fini.
- Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide, $\sup |A - A| = \sup A - \inf A$.
- Si f, g injectives, $g \circ f$ injective. Si $g \circ f$ surjective, g surjective.
- Si f, g surjectives, $g \circ f$ surjective. Si $g \circ f$ injective, f injective.

8.1 Limite d'une suite

Exercice 1.
Pour $n \geq 3$, soit x_n l'unique solution de l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ d'inconnue $x \in]1, +\infty[$. Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 2.
Soit u une suite réelle et $a \in]-1, 1[$. Soit x la suite réelle définie par $x_n = u_{n+1} - au_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k x_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que x converge vers 0 ssi u converge vers 0.
3. Montrer que x et u sont de même nature.

Indication. Pour l'implication directe de la question 2, preuve à la Cesáro. Pour la question 3, se ramener à la question 2 par "changement de variable".

8.2 Injections, surjections et bijections

Exercice 3.
Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux fonctions telles que $g \circ f$ est injective et f est surjective. Montrer que g est injective.

Exercice 4.
Soient X un ensemble quelconque et f et g deux fonctions de X dans lui-même. On suppose que $g \circ f^2$ est injective et que $f \circ g^2$ est surjective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 5.
Soient $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur et $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque ouvert unité. On pose $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, définie sur $\mathscr{P}$, à valeurs dans $\mathscr{D}$. Montrer que f est bien définie, et est une bijecion de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{D}$.

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x+1 \rfloor (x+1) & \text{si } x \geq 0, \\ \lceil x-1 \rceil x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tracer le graphe de f et montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7.
Soient A et B deux ensembles tels que A est inclus dans B. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application de $\mathscr{P}(B)$ dans lui-même, définie par $X \mapsto X \cup A$, soit injective. À quelle condition est-elle surjective ?

Exercice 8. ★
Soient X et Y deux ensembles. Soit $F : X \longrightarrow \mathscr{P}(Y)$ une fonction telle que :

$$\begin{cases} \forall (x, x') \in X^2, & F(x) \cap F(x') \neq \varnothing \implies x = x', \\ \forall x \in X, & F(x) \neq \varnothing. \end{cases}$$

En déduire qu'il existe une injection $f : X \longrightarrow Y$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 9 : Curryfication. ★
Pour X et Y des ensembles, on note $\mathscr{F}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions de X dans Y.

1. Soient X, Y et Z des ensembles. Montrer que $\mathscr{F}(X \times Y, Z)$ est en bijection avec $\mathscr{F}(X, \mathscr{F}(Y, Z))$.
2. En déduire que pour $n, p, q \in \mathbb{N}$, on a $n^{pq} = (n^p)^q$.

Exercice 10 : Cantor-Bernstein via Knaster-Tarski. ★
Soit X un ensemble. Soit $\Phi : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ croissante (pour l'inclusion). On veut montrer que Φ admet un plus petit et un plus grand point fixe.

1. Soit $\mathrm{Pre}(\Phi) = \{Y \subseteq X \mid \Phi(Y) \subseteq Y\}$ l'ensemble des points préfixes de Φ. Justifier que $\mathrm{Pre}(\Phi)$ admet un minimum (pour l'inclusion), noté A.
2. Montrer que $\Phi(A) \in \mathrm{Pre}(\Phi)$. En déduire que A est un point fixe de Φ, et que c'est le plus petit d'entre eux.
3. En appliquant le résultat précédent à une fonction Ψ bien choisie, montrer que Φ admet un plus grand point fixe.

En particulier, on a montré que Φ admet un point fixe. On souhaite démontrer le théorème de Cantor-Bernstein : soient X et Y deux ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ deux fonctions injectives.

4. Montrer que $\Phi : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ définie par $\Phi(Z) = \complement_X\, g\left(\complement_Y\, f(Z)\right)$ pour tout $Z \subseteq X$ est bien définie, et admet un point fixe $A \subseteq X$.
5. Montrer que si $x \in \complement_X A$, alors il existe un unique $y_x \in Y$ tel que $g(y_x) = x$, et qu'on a alors $y_x \notin f(A)$.
6. Exhiber une bijection entre X et Y.

Semaine 9 : Bijections & Arithmétique

Questions de cours :

- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Dessin. Cas d'égalité.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite E, domaine de f, si chaque $f|_{A_n}$ est injective, alors f est injective.
- Existence de la factorisation première et infinité des nombres premiers.
- Théorème de la division euclidienne.

9.1 Apéritif arithmétique

Exercice 1.
Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 9. On pourra par exemple considérer le terme $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Nombres de Mersenne.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $5^{2n} + 2^{3n}$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 4.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^n \equiv b^n\ [n^2]$.

9.2 Injections, surjections et bijections

Exercice 5.
Soit $\inf : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}$ la fonction qui à une partie X de $\mathbb{R}$ associe sa borne inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$. Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 6.
Soient $f : E \to F$ et B une partie de F. Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

Exercice 7.
Soit $f : E \to F$ une fonction. Soit $\mathscr{I}(f) = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid f^{-1}(f(X)) = X\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. f est injective ;
ii. Pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathscr{I}(f)$;
iii. $\mathscr{I}(f) = \mathscr{P}(E)$;
iv. Pour tout $X \subseteq E$, si $f^{-1}(f(X)) = E$, alors $X = E$.

Exercice 8.
Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to X$ trois fonctions. Montrer que si, parmi les composées $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ et $g \circ f \circ h$, deux de ces fonctions sont injectives et que la troisième est surjective, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 9.

1. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(p, q) = 2^p(2q+1)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que f est une bijection.
2. En déduire que $\mathbb{N}^k$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10.
Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que f est surjective.
2. Trouver une expression simple de $f(z)$ lorsque z est de module 1, puis en déduire que f n'est pas injective.
3. Soient $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < 1\}$ et $\mathscr{E} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| > 1\}$. Établir un lien entre $f|_{\mathscr{D}}$ et $f|_{\mathscr{E}}$.
4. Établir que l'image de $\mathscr{D}$ par f ne s'intersecte pas avec l'image de $\mathbb{U}$ par f.
5. Soit $\mathscr{F} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < 1 \text{ ou } (|z| = 1 \text{ et } \operatorname{Im} z \geq 0)\}$. Montrer que $f|_{\mathscr{F}}$ est une bijection de $\mathscr{F}$ sur $\mathbb{C}$.

Indication. Pour la dernière question, il ne reste qu'à montrer que f est injective sur $\mathscr{D}$.

Exercice 11. ★
Soit E un ensemble. Soit, pour $X \subseteq E$, $\mathbb{1}_X : E \to \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{1}_X(x) = 1$ si $x \in X$ et $\mathbb{1}_X(x) = 0$ sinon, pour $x \in E$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ X & \mapsto & \mathbb{1}_X \end{array}$$

est une bijection. Quelle est sa réciproque ?

Exercice 12. ★

1. Exhiber une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
2. En utilisant la question précédente, construire une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 13. ★
Soient $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective et $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective telles que $s \geq i$. Montrer que $s = i$.

Semaine 10 : Arithmétique

Questions de cours :

- Si a et b premiers avec n, alors ab premier avec n. Si a et b divisent n, si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise n.
- Existence et unicité de la forme irréductible d'un rationnel.
- Petit théorème de Fermat.
- Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, si $k \geq 2$ avec a premier avec b, si ab est la puissance k-ème d'un entier, alors a et b sont des puissances k-èmes d'entiers.

Exercice 1.
Montrer que le complexe $\omega = \frac{3+4i}{5} \in \mathbb{U}$ n'est pas une racine n-ème de l'unité, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra étudier les suites définies par $a_n = \mathrm{Re}((3+4i)^n)$ et $b_n = \mathrm{Im}((3+4i)^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, modulo 5.

Exercice 2.
Résoudre le système $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$ d'inconnues $a, b \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.
Quels sont les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n(n+1)$ est divisible par 100 ?

Exercice 4.
Quels sont les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n(n+3)$ est divisible par 40 ?

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \equiv 1\ [10]$ ssi $n \equiv 1\ [2]$ et $n \equiv 1\ [5]$.
2. Quels sont les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^x 7^y \equiv 1\ [10]$?

Exercice 6.
Soit p un nombre premier et soit $n \in \mathbb{Z}$ divisible par p.

1. Montrer que $\min(v_p(n), v_p(n+p)) = 1$.
2. Montrer que parmi les p entiers $v_p(n), v_p(n+p), \dots, v_p(n+p(p-1))$, exactement $p-1$ d'entre eux sont égaux à 1.

Exercice 7.
Montrer que le produit de quatre entiers naturels consécutifs non-nuls n'est jamais un carré parfait.

Indication. On pourra montrer écrire $n(n+1)(n+2)(n+3)$ sous forme canonique…

Exercice 8.
Quels sont les entiers naturels dont le produit des diviseurs vaut 45^{42} ?

Exercice 9.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$?

Semaine 12 : De l'algèbre !

Questions de cours :

- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et produit de deux matrices triangulaires supérieures.
- Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires.
- Le commutant de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est réduit à l'ensemble des homotéties.
- Théorème de Lagrange dans le cas d'un groupe *commutatif* fini et application à la détermination des sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.

12.1 Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 2.
Montrer que la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ suivante est inversible, et calculer son inverse.

$$(\max(0, j-i+1))_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3 \end{array} \right.$$

d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = 2$ si $i = j$ et $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$. Calculer A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

Indication. On pourra introduire la matrice U dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 5.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le produit de n matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nul.

12.2 Structures de groupes et d'anneaux

Exercice 6.
Soit $(G,\cdot)$ un groupe quelconque et A un sous-ensemble de G. Montrer que l'ensemble des $g \in G$ tels que $gA = A$ forme un groupe pour la loi de $(G,\cdot)$.

Exercice 7 : Matrices équitables.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *équitable* si elle est à coefficients strictement positifs et si pour tout $i,j,k \in [\![1,n]\!]$, on a $m_{i,k} = m_{i,j}m_{j,k}$. Pour deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $A \otimes B = (a_{i,j}b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices équitables est un groupe pour la loi $\otimes$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est une matrice équitable. si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $m_{i,j} = \exp(\lambda_i - \lambda_j)$ pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$.

Exercice 8.
Soit A l'ensemble des rationnels dont le dénominateur de la fraction irréductible est un entier naturel impair. Montrer que $(A,+,\times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 9.
Soit G un ensemble muni d'une loi interne $/$ telle que pour tout $a,b,c \in G$:

- $a/a = b/b$,
- $a/(b/b) = a$,
- $(a/a)/(b/c) = c/b$,
- $(a/c)/(b/c) = a/b$.

Munir G d'une loi $\cdot$ de sorte que $(G,\cdot)$ soit un groupe et $a/b = a\cdot b^{-1}$, pour $a,b \in G$.

Semaine 13 : Polynômes

Questions de cours :

- Sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
- Formule de Vandermonde.
- Degré du produit de deux polynômes.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Calcul de la multiplicité d'une racine par dérivation.

Exercice 1.
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Résoudre les équations suivantes :

1. $P \circ P = P$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$,
2. $P^2 = XQ^2$, d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2.
Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 3.
Déterminer tous les polynômes complexes $P \in \mathbb{C}[X]$ satisfaisant :

$$P(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(X^2+1) = P(X)^2 + 1.$$

Exercice 4.
Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z},\ \int_k^{k+1} P(t)\mathrm{d}t = k + 1$.

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $X^a - 1$ divise $X^b - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ ssi a divise b dans $\mathbb{N}$.

Exercice 6. ★

1. Soit $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors :
$$|x| \leq \frac{\max\{\lambda_k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}{|\lambda_n|} + 1.$$
2. Montrer qu'il existe un algorithme prenant en entrée un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ et retournant `vrai` si et seulement si P a une racine dans $\mathbb{Z}$.

Indication. Faire une disjonction de cas selon que $|x| > 1$ ou $|x| \leq 1$. Dans le premier cas, montrer que

$$|\lambda_n||x|^n \leq \mu \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1},$$

où $\mu = \max\{\lambda_k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Exercice 7. ★

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(X^2 + X + 1)^2$ divise $(X + 1)^n - X^n - 1$.

Semaine 14 : Polynômes & Algèbre linéaire

Questions de cours :

- Définition des polynômes de Lagrange, existence et unicité de l'interpolateur de Lagrange.
- Simplifier $\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$ où $L_1, \ldots, L_n$ polynômes de Lagrange en $x_1, \ldots, x_n$.
- $\mathbb{Q}[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}\}$.
- Si b combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec coef. non-nul sur a, alors $\mathrm{Vect}(X \cup \{a\}) = \mathrm{Vect}(X \cup \{b\})$.
- Si X est libre et $y \in E$ n'est pas combinaison linéaire de X, alors $X \cup \{y\}$ est libre.

14.1 Polynômes

Exercice 1.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_0, \ldots, a_{k-1}$ des réels positifs.

1. Montrer que P admet une unique racine strictement positive, notée λ. On pourra considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f : t \mapsto \frac{\tilde{P}(t)}{t^n}.$$
2. Montrer que pour toute racine négative ou nulle μ de P, on a $|\mu| \leq \lambda$. Exhiber un polynôme P pour lequel on a égalité.

Exercice 2 : Interpolation de Hermite.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n$ et $z_0, \ldots, z_n$ des points de $\mathbb{K}$. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X]$, appelé *interpolateur de Hermite*, tel que
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = y_i \text{ et } P'(x_i) = z_i.$$
On note $L_0, L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Calculer les valeurs de $H_i(x_j)$ et $H_i'(x_j)$, pour $j \in [\![0, n]\!]$, où $H_i = L_i^2$.
2. Quel est le degré de H_i, $i \in [\![0, n]\!]$? Conclure.

Exercice 3. ★
On souhaite déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

1. Montrer que si $P \neq 0$ satisfait la propriété précédente, alors les racines de P sont nulles ou une racine de l'unité.
2. Montrer que si z est une racine de $P \neq 0$, alors $z \in \{0, 1, -j, -j^2\}$, puis que $z \in \{0, 1\}$.
3. Conclure.

14.2 Algèbre linéaire

Exercice 4.
Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telles que $f(0) = 1$ est-elle un $\mathbb{K}$-espace ? Quid des fonctions f telles que $f(1) = 0$?

Exercice 5 : Famille dirigée de sous-espaces.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace et I un ensemble non-vide potentiellement infini. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E.

1. On suppose que pour tout $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subseteq F_k$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace de E.
2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 6.
Montrer que la famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 7.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et des réels tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$. On note V l'ensemble des foncions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dont les restrictions aux intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in [\![0, n-1]\!]$, sont affines.

1. Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace.
2. Soit, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_i(x) = 0$ si $x < x_i$ et $f_i(x) = (x - x_i)$ si $x \geq x_i$. Justifier que $f_i \in V$.
3. Montrer que $(g, f_0, \ldots, f_{n-1})$ est une famille libre de V, où $g : x \mapsto 1$.

Exercice 8 : Espace vectoriel libre. ★
Soit X un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. Soit

$$\mathbb{K}X = \{(\lambda_x)_{x\in X} \in \mathbb{K}^X \mid \text{ tous les } \lambda_x \ (x \in X) \text{ sauf un nombre fini sont nuls}\}.$$

On définit la loi interne $+ : \mathbb{K}X \times \mathbb{K}X \to \mathbb{K}X$ comme la somme terme à terme et la loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}X \to \mathbb{K}X$ par $(\mu, (\lambda_x)_{x\in X}) \mapsto (\mu\lambda_x)_{x\in X}$.

0. Déterminer $\mathbb{K}X$ lorsque $X = [\![1, n]\!]$ $(n \in \mathbb{N})$ et lorsque $X = \mathbb{N}$.
1. Montrer que $(\mathbb{K}X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace.
2. Montrer que la fonction $\Delta : X \to \mathbb{K}X$ qui à x associe $(\delta_{x,y})_{y\in X}$ est une injection de X dans $\mathbb{K}X$, appelée *injection canonique*.
3. Montrer que la famille $\Delta(X)$ est une base de $\mathbb{K}X$.

Semaine 15 : Algèbre linéaire

Questions de cours :

- Algorithme de la base incomplète.
- Dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$; la liberté est admise.
- Dimension d'un sous-espace en dimension finie.
- Dimension de l'ensemble des matrices carrées de trace nulle.
- Toute matrice carrée d'ordre n admet un polynôme annulateur de degré au plus n^2.

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Justifier que E peut-être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et déterminer $\dim_{\mathbb{R}} E$ selon $\dim_{\mathbb{C}} E$.

Exercice 2.
On note 1 la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à 1. Déterminer le rang de la famille

$$(1,\ \cos,\ \sin,\ \cos^2,\ \sin^2).$$

Exercice 3 : Solutions de $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une fonction. Soit $\mathcal{S}_f$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant l'équation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{S}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si f est de la forme $\lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 4 : Hyperplans.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n. Un hyperplan de E est un sous-espace de E de dimension $n-1$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

0. Montrer que $\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ sont des hyperplans de $\mathbb{R}^n$.
1. Montrer que $H_1 + H_2 = E$ si et seulement si $H_1 \neq H_2$.
2. On suppose que H_1 et H_2 sont distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 5.
Soit E le $\mathbb{R}$-espace des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $A \subseteq \mathbb{R}_+$ on définit l'indicatrice de A comme étant la fonction $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, qui à $x \in \mathbb{R}_+$ associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Montrer que l'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ prenant un nombre fini de valeurs — i.e. $F = \{f \in E \mid \mathrm{im}(f) \text{ est finie}\}$ — est un sous-espace de E.
2. Montrer que $(\mathbb{1}_A)_{A\subseteq\mathbb{R}_+}$ est une famille génératrice de F. Est-elle libre ?
3. Montrer que la famille $(\mathbb{1}_{[0,a]})_{a\in\mathbb{R}_+}$ est libre dans F. Est-elle génératrice ?

Exercice 6.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\mathbb{g}$ une famille génératrice non-vide de E. Montrer qu'une famille $\mathbb{f}$ de E est une base de E ssi tout vecteur de $\mathbb{g}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{f}$.

Exercice 7.
Soient $f_1, \dots, f_p$ des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. et $x_1, \dots, x_q$ dans $\mathbb{K}$. Notons $C_i = (f_i(x_j))_{1 \leq j \leq q} \in \mathbb{K}^q$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) \leq \mathrm{rg}(f_1, \dots, f_p).$$

Exercice 8.
Soient E le $\mathbb{R}$-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, $n \in \mathbb{N}$ et

$$F = \left\{x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) \;\middle|\; P, Q \in \mathbb{R}_n[X]\right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace de E de dimension finie, et déterminer sa dimension.

Exercice 9.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{b} = ((X-\lambda)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et ${}^t(a_0 \;\, a_1 \cdots \;\, a_n)$ le vecteur colonne de P dans $\mathbb{b}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $(X-\lambda)^k$ divise P si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$.
3. Soient $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la multiplicité de λ en tant que racine de P_k est exactement k. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 10 : Famille positivement génératrice. ★
Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de E est dite posititivement génératrice lorsque tout vecteur de E peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^{p} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$. Soit $\mathbb{g} = (e_1, \dots, e_p)$ une telle famille.

1. Montrer que $p \geq n+1$. Montrer que le cas d'égalité peut-être atteint.
2. On suppose $p \geq 2n+1$. Montrer qu'il existe une sous-famille stricte de $\mathbb{g}$ qui est encore positivement génératrice.
3. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $2n$ dont on aucune sous-famille stricte n'est positivement génératrice.

Semaine 16 : Algèbre linéaire & Limites d'une fonction

Questions de cours :

— Une des neuf définitions de la limite d'une fonction en un point : quantification et dessin.
— $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
— $\lim_a g \circ f$.
— Théorème de la limite monotone.
— $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue : plan de la preuve + détails d'un point.

16.1 Algèbre linéaire

Exercice 1.
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, soit $H = \{\lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des homothéties réelles et Z l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(1) = 0$. Montrer que H et Z sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 2.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$.

1. Montrer que l'ensemble $P \cdot \mathbb{K}[X]$ des multiples de P est un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $P \cdot \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 3.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et F un sous-espace strict de E. On souhaite montrer qu'il existe une base de E dont aucun vecteur n'appartient à F. Soit S un supplémentaire de F dans E.

1. Montrer qu'il existe une base de E sous la forme $(s_1, \ldots, s_p, f_1, \ldots, f_q)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_p \in S$ et $f_1, \ldots, f_q \in F$.
2. Montrer que $(s_1, \ldots, s_p, f_1 + s_1, \ldots, f_q + s_1)$ est une base de E.
3. Conclure.

Exercice 4.
Soit $F = \{(1-X)Q(X^2) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\} \subseteq \mathbb{R}[X]$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, puis que l'ensemble des *polynômes pairs* — càd les polynômes dont la fonction polynomiale associée est paire — est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. ★
Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Montrer que F et G ont un supplémentaire en commun ssi $\dim F = \dim G$.

16.2 Limites d'une fonction & continuité

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f|_{\mathbb{Q}}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8.
Déterminer la limite de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 4} - x$ en $+\infty$.

Exercice 9.
Déterminer la limite de $x \mapsto \sin(x)\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ en 0.

Exercice 10.
Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Déterminer les points en lesquels f est continue.

Exercice 11.
Montrer que $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ est continue sur son domaine de définition, puis étudier si l'on peut la prolonger par continuité. Admet-elle des limites en $\pm\infty$?

Semaine 17 : Analyse à foison

Questions de cours :

— Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, si f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, alors f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.
— Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.
— Théorème de Rolle — en admettant la condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.
— Théorème des accroissements finis — avec un dessin explicatif et en admettant le théorème de Rolle.
— Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ s'annule en au moins $k+1$ points, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point.

17.1 Continuité

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit la fonction auxiliaire $S_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par $S_f(x) = \sup\{f(y) \mid y \in [0, x]\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que S_f est bien définie.
2. Montrer que si f est continue, alors S_f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est continue.
3. Montrer qu'il existe une fonction f discontinue mais telle que S_f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue.
4. Montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ mais telle que S_f n'est pas dérivable.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$, et telle que l'image (directe) de tout intervalle ouvert est un intervalle ouvert. Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et f une bijection continue de I sur J. Montrer que les courbes représentatives de f et de $f^{-1} : J \to I$ s'intersectent si et seulement si f admet un point fixe.

Exercice 4 : Pseudo-réciproque du TVI.
Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective et vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires — pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédant par f dans $[a, b]$ — est continue.

Indication. On pourra commencer par montrer que f est monotone.

17.2 Dérivabilité

Exercice 5.
Soit P une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$. Majorer le nombre de solutions de l'équation $P(x) = e^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Soit f dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout x qui n'est pas dans $[a, b]$, il existe au moins une tangente à la courbe passant par le point d'abscisse x et d'ordonnée nulle.

Exercice 7 : Plus grand minorant lipschitzien : un exemple. ★
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Fixons $k > 0$, et considérons la fonction

$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{k}{2}, \\ \frac{k^2}{4} + k(|x| - \frac{k}{2}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. La fonction f est-elle lipschitzienne ?
2. Montrer que φ_k est $\mathscr{C}^1$ et calculer φ_k'. En déduire que φ_k est lipschitzienne.
3. Montrer que $\varphi_k \leq f$.
4. Soit ψ une fonction k-lipschitzienne minorant f. Montrer que $\psi \leq \varphi_k$.

Semaine 18 : Encore de l'analyse...

Questions de cours :

- Théorème de la limite de la dérivée.
- Théorème de Rolle généralisé à l'intervalle $[0, +\infty[$ — preuve par composition à droite par une fonction adaptée.
- Lemme de primitivation des développements limités.
- Deux $\mathtt{DL}_0$ à démontrer parmi :

$$\frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ e^x,\ (1+x)^\alpha,\ \sin x,\ \cos x,\ \arctan x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x$$

18.1 Mise en bouche asymptotique

Exercice 1.
Développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de $\frac{\arctan x}{1+x}$.

Exercice 2.
Développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de $\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)$.

Exercice 3.
Développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de $\exp(x)\sqrt{1+x}$.

18.2 Dérivabilité

Exercice 4.
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}.$$

Exercice 5.
Soit P une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$. Majorer le nombre de solutions de l'équation $P(x) = e^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que :

$$\lim_{+\infty} f' = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Que dire de la réciproque ?

Exercice 7 : Injectivité locale.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' est continue en a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f|_V$ soit injective.

Exercice 8.
Pas imprimé : Soit $f : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f est prolongeable par continuité en zéro, et que ce prolongement est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 9.

1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, telle que $f'(x_n)$ converge vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$.
2. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f^2 + (1+f')^2 \leq 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 10 : Plus grand minorant lipschitzien : un autre exemple.
Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x \leq \ln(k), \\ k(1 + x - \ln(k)) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. La fonction exp est-elle lipschitzienne ?
2. Montrer que φ_k est $\mathscr{C}^1$ puis que φ_k est lipschitzienne.
3. Montrer que $\varphi_k \leq \exp$.
4. Soit ψ une fonction k-lipschitzienne minorant exp. Montrer que $\psi \leq \varphi_k$.

Exercice 11. ★
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^1 telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est soit constante, soit l'identité.

Semaine 19 : Analyse asymptotique

Questions de cours :

— Nada !

19.1 Mise en bouche calculatoire

Exercice 1.

1. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$\left(\frac{\exp(\frac{1}{n})-\exp(\frac{2}{n})}{\sin(\frac{1}{n})+\sin(\frac{2}{n})}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \qquad \left(\left(\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^5-1\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

2. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

$$x\longmapsto \ln(3e^x+e^{-x})-2\ln(2) \text{ en } 0, \qquad x\longmapsto (1+x^2)^x \text{ en } +\infty.$$

3. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 2.

1. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

$$x\longmapsto \ln(1+x+\sqrt{4+x}) \text{ en } +\infty, \qquad x\longmapsto x^x-x \text{ en } 1.$$

2. Déterminer un équivalent des suites suivantes :

$$\left(n^2+n-\ln(n^3+n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \qquad \left(\sin\left(\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right)-\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

3. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin x)^x-(1+x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Exercice 3.

1. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

$$x\longmapsto (1+\sin x)^{\cos x}-1 \text{ en } 0, \qquad x\longmapsto \ln\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right) \text{ en } +\infty.$$

2. Déterminer le $\mathrm{dl}_4(\frac{\pi}{4})$ de $\ln\circ\tan$.
3. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{\ln n}}}{\ln n}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\arctan(2\sin x)-\frac{\pi}{4}}{\cos 3x}.$$

19.2 Toujours des calculs

Exercice 4.
Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}.$$

Exercice 5.
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ et $\alpha \in]a, b[$.

1. Calculer la limite
$$\ell = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha - h) - 2f(\alpha) + f(\alpha + h)}{h^2}.$$
2. En faisant une hypothèse supplémentaire sur la régularité de f, déterminer un équivalent simple de
$$\frac{f(\alpha - h) - 2f(\alpha) + f(\alpha + h)}{h^2} - \ell$$
lorsque h tend vers 0.

Exercice 6.
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n.$$

Exercice 7.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si

$$P(x) - Q(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right),$$

alors $P = Q$.

Exercice 8. ★
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0, telle que

$$u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}.$$

En introduisant la suite de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Indication. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$|v_n| \leq |v_n + v_{2n}| + |v_{2n} + v_{4n}| + \cdots + |v_{2^k n} + v_{2^{k+1} n}| + |v_{2^{k+1} n}|.$$

Exercice 9. ★
Trouver les réels $a, b \in \mathbb{R}$ pour qu'on ait

$$\cos(x) = \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ maximal.

19.3 Exos en rab

Exercice 10.
Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{(x(x - \ln x))^x}.$$

Exercice 11.
Déterminer le $\mathrm{dl}_{15}(0)$, puis le $\mathrm{dl}_{16}(0)$, de $x \mapsto (\sin x - \operatorname{sh} x)^2(\tan x - \operatorname{th} x)^3$.

Exercice 12.
Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)^{\tan(x)} - 1}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh} x} \right)^x.$$

Exercice 13.
Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + ne^{-n}\right)^{\ln n}.$$

Exercice 14.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f_0, \ldots, f_n$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant des $\mathrm{dl}_n(0)$ avec :

$$f_j(x) = a_{0,j} + a_{1,j}x + a_{2,j}x^2 + \ldots + a_{n,j}x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

pour tout $j \in [\![0, n]\!]$. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que si A est inversible, alors $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Que dire de la réciproque ?

Semaine 20 : Applications linéaires

Questions de cours :

- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel & une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au seul vecteur nul.
- Si E est de dimension finie et si F est isomorphe à E, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.
- Forme géométrique du théorème du rang & théorème du rang.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $E = \operatorname{im} f + \ker g \iff \operatorname{im}(gf) = \operatorname{im}(f)$.

Exercice 1.
Soit $T > 0$ et soit $\mathscr{C}_T^\infty$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$ et T-périodiques.

1. Vérifier que $\mathscr{C}_T^\infty$ — muni des lois usuelles — forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que l'opérateur de dérivation $\mathrm{d} : f \mapsto f'$ est un endomorphisme sur $\mathscr{C}_T^\infty$.
3. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$.

Exercice 3 : Matrices de rang 1.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{K}^n$ non-nuls tel que $XY^\mathsf{T} = M$.

Exercice 4 : Homotéthies.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est une homotéthie ssi la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$.

Exercice 5 : Lemme des noyaux version bébé.
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ des applications linéaires. Montrer que :
$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker g.$$
2. On suppose E de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que
$$f^2 + f - 2\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
   (a) Calculer $(f - \mathrm{id}_E) \circ (f + 2\mathrm{id}_E)$ et $(f + 2\mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E)$.
   (b) En déduire que
$$E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f + 2\mathrm{id}_E).$$

Exercice 6.
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces, tels que F et G sont de dimension finie. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$ ssi $\operatorname{im} f \cap \ker g = \{0_F\}$.

Exercice 7 : Noyaux itérés.
Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace et f un endomorphisme sur E.

1. Justifier que la suite de sous-espaces $(\ker f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker f^k = \ker f^{k+1}$. Montrer que $\ker f^k = \ker f^\ell$ pour tout $\ell \geq k$.
3. Montrer que si E est de dimension finie, alors la suite de sev $(\ker f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 8. ★
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que

$$u_{n+d} = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{d-1} u_{n+i}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}$.

Exercice 9 : Endomorphisme nilpotent. ★
Soit E un $\mathbb{K}$-espace et $f \in \mathscr{L}(E)$ un *endomorphisme nilpotent* — i.e. tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que f^k est nul. Soit p le plus petit entier tel que f^p est nul : on appelle cet entier *indice de nilpotence de* f. Montrer que la famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est libre.

Semaine 25 : Intégration & Analyse asymptotique

Questions de cours :

- Théorème de Heine.
- Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.
- Lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathscr{C}^1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } f\in\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C}).$$

- Soit $f\in\mathscr{C}^1([1,+\infty[)$ positive décroissante. Il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \ell + \underset{n\to\infty}{o}(1).$$

25.1 Intégration sur un segment

Exercice 1 : Égalité de la moyenne.
Soient $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a,b]\to\mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et positive.

1. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

2. Le résultat reste-t-il vrai si f n'est plus supposée continue mais seulement continue par morceaux ?

Exercice 2.
Trouver le plus petit réel $\alpha > 0$ tel qu'on ait, pour tout $x > 0$:

$$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9} < (1+x)^{\frac{1}{3}} < 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\alpha x^3.$$

Exercice 3.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (k+n)}.$$

Exercice 4. ★
Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ et la calculer.

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \ell - u_n$. On remarque qu'on peut écrire ℓ comme une somme télescopique $\sum_{k=1}^n \big(F(\frac{k}{n}) - F(\frac{k-1}{n})\big)$ où $F : [0,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction bien choisie.

2. Trouver un équivalent simple de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

25.2 Analyse asymptotique de niveau 2

Exercice 5.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6.
Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de

$$\int_1^x e^t \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7.
Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Déterminer la limite de la suite.
2. Montrer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8.
Soit $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi}\frac{|\sin(tx)|}{t}\mathrm{d}t$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Justifier que F est bien définie.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée.
3. Justifier que, pour tout $x > 1$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t + \int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t.$$

4. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(x)$.

Exercice 9.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto e^x + x^2 - nx$ a un minimum y_n, atteint en un unique point $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer alors un équivalent des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10.
Montrer que $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Calculer le développement limité à l'ordre 6 de f^{-1} en 0.

Semaine 26 : Représentation matricielle des applications linéaires

Questions de cours :

- Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde, interprétée comme matrice d'une certaine application linéaire.
- Formule de changement de base pour une application linéaire — preuve à présenter à partir du diagramme commutatif.
- Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r, il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F pour lesquelles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$.
- Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$. En outre, on peut imposer à C d'être nulle et à B d'être inversible sous l'hypothèse que $\operatorname{im} A$ et $\ker A$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.
- Tout endomorphisme nilpotent d'indice n en dimension n a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $\varphi(P(X)) = P(X+1)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 2.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est non-inversible si, et seulement si, A est équivalente à une matrice triangulaire stricte.

Exercice 3.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence n. On appelle *commutant* de f le sous-ensemble $\mathscr{C}(f)$ de $\mathscr{L}(E)$ formé des endomorphismes $g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$, et qu'une base de $\mathscr{C}(f)$ est $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.

Exercice 4.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpontent $d \in \mathbb{N}^*$ — on rappelle que d est le plus petit entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_E$.

1. Justifier que $d \leq n$.
2. Montrer que $\mathrm{id}_E - u$ est un isomorphisme et déterminer son inverse en fonction de u.
3. Montrer que l'équation
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'admet aucune solution $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 5.
Soit f l'endomorphisme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = 2M + {}^tM$. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale. Calculer la trace de f.

Exercice 6.
Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels $\lambda < \mu$ tels que $A - \lambda I_3$ et $A - \mu I_3$ ne sont pas inversibles.
2. Montrer que la matrice A est semblable, sur $\mathbb{R}$, à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$
3. En déduire que A est inversible et calculer simplement A^{-1}. De même, calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. ★
Résoudre l'équation $A^2 + A = B$ d'inconnue $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On pourra commencer par étudier la matrice B.

Semaine 27 : Représentation matricielle des applications linéaires & Déterminants

Questions de cours :

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ est un polynôme unitaire de degré n, et ses racines sont exactement les valeurs propres de A.
- Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Calcul des déterminants de Vandermonde par un raisonnement polynomial. La récurrence finale n'a pas besoin d'être formalisée, trois petits points suffisent.

27.1 Calculs de déterminants

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de la matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon, où $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de la matrice $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{ij} = |i - j|$ où $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 3.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La *matrice de permutation* P_σ associée à σ est la matrice $(p_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ définie par $p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. En se ramenant à la définition du déterminant, calculer $\det(P_\sigma)$.

Le but de la suite de l'exercice est de prouver le résultat précédant d'une autre façon.

2. Calculer l'image de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{Q}^n$ par P_σ, puis montrer que pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $P_{\sigma\circ\tau} = P_\sigma \cdot P_\tau$.
3. Montrer, pour $i \in [\![2, n]\!]$, que le déterminant de la matrice de permutation associée à la transposition $(1, i)$ vaut -1.
4. En admettant que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $(1, i)$ avec $i \in [\![2, n]\!]$, en déduire la valeur de $\det(P_\sigma)$.

27.2 Autres exercices

Exercice 4.
Soit f l'endomorphisme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(A) = A + \mathrm{tr}(A)I_n$, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(f)$.

Exercice 5.
Soit f l'endomorphisme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = 2M + {}^tM$. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale. En dédurie la trace de f, son déterminant, et son polynôme caractéristique.

Exercice 6. ★
Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\det(C+X) = \det(X)$ pour toute matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que C est nulle.

Indication. Supposer que $C = J_r$ où r est le rang de C.

Exercice 7.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme sur E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(E)$ tels que $f = g_1 + g_2$.

Semaine 28 : Déterminants & Position et dispersion d'une variable aléatoire

Questions de cours :

- Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$ le sont aussi sur $\mathbb{R}$.
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de plus grande valeur n :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k).$$

- Inégalité de Jensen : $\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X))$ pour toute variable aléatoire X à valeurs dans I et pour toute fonction concave deux fois dérivable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

28.1 Déterminants

Exercice 1 : Déterminants de Hürwitz.
Soient $a, b, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On souhaite calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}.$$

On introduit le polynôme

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} x_1 + X & a + X & \dots & a + X \\ b + X & x_2 + X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + X \\ b + X & \dots & b + X & x_n + X \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $P_n(X)$ est une fonction affine.
2. En déduire la valeur de D_n. (On pourra commencer par étudier le cas $a \neq b$.)

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le rang de la comatrice de A selon le rang A. On pourra distinguer les cas $\mathrm{rg}(A) = n$, $\mathrm{rg}(A) = n - 1$ et $\mathrm{rg}(A) \leq n - 2$.

28.2 Position et dispersion d'une variable aléatoire

Exercice 3 : Espace probabilisé fini.
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$. Montrer que $p = 0$ ou $p = 1$.

Exercice 4 : Marche aléatoire.
On dispose d'une pièce biaisée, dont la probabilité de tomber sur « pile » vaut $p \in \,]0,1[$. Un joueur, initialement sans argent, gagne un euro lorsque la pièce tombe sur pile et perd un euro sinon. On note G_n son gain (algébrique) après $n \in \mathbb{N}$ parties. Déterminer l'espérance et la variance de G_n.

Indication. On pourra introduire la variable aléatoire P_n égale au nombre de « pile » après n lancers, puis exprimer G_n selon P_n.

Exercice 5 : Fonction génératrice.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X le polynôme

$$\varphi_X(T) = \mathbb{E}(T^X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)T^k.$$

0. Pourquoi φ_X est-il un polynôme ?
1. Justifier que la loi de X est entièrement déterminée par φ_X.
2. a. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ en fonction de $\varphi_X'(1)$ et $\varphi_X''(1)$.
   b. Application : Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
3. a. Montrer que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1}\varphi_{X_2}$.
   b. Application : Soit $X_1 \sim \mathscr{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathscr{B}(n_2, p)$ deux variables aléatoires finies indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

Exercice 6 : Premier pile.
Soit $p \in \,]0,1[$. On lance $n \geq 2$ fois une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut p. Soit T_n la variable aléatoire correspondant au numéro du premier lancer pour lequel on obtient un « pile », et égal à $n+1$ si on obtient jamais « pile ». Déterminer $\mathbb{E}[T_n]$ puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7 : Nombre d'éléments distincts.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on tire n éléments dans $[\![1, n]\!]$ de façon indépendante, et soit X_n le nombre d'éléments distincts obtenus. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to\infty}{\sim} (1 - e^{-1})n.$$

Indication. On pourra considérer la variable aléatoire $X_{k,n}$ valant 1 si l'élément k a été tiré et 0 sinon.

Exercice 8 : Convergence au sens d'Euler.
Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *convergente au sens d'Euler* vers $x \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe $s \in \,]0,1[$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s^j (1-s)^{n-j} x_j = x.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors elle converge aussi vers x au sens d'Euler pour tout $s \in \,]0,1[$ — on se fixe un tel s pour la suite de l'exercice.

1. Justifier que l'on peut supposer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0.
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Montrer que

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s^j (1-s)^{n-j} x_j\right| < M \sum_{j=0}^{N-1} \binom{n}{j} s^j (1-s)^{n-j} + \varepsilon$$

   pour tout $n \geq N$, où $M = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
3. Soit S une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et s. Montrer que

$$\sum_{j=0}^{N-1} \binom{n}{j} s^j (1-s)^{n-j} \leq \mathbb{P}(|S - ns| \geq n\varepsilon)$$

   si $n > \frac{N-1}{s-\varepsilon}$.
4. Conclure.

Exercice 9 : Matrices aléatoires. ★
Soit $M = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variid sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors $\det(M)$ est une variable aléatoire réelle. Calculer son espérance. Calculer sa variance en supposant que les variables $X_{i,j}$ sont centrées.

Semaine 29 : Variables aléatoires & Espaces préhilbertiens réels

Questions de cours :

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Preuve dans le cas défini positif.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}({}^tMN)$. « La relation ${}^tE_{i,j}E_{k,l} = \delta_{i,k}E_{j,l}$ doit être retrouvée rapidement et expliquée proprement et non apprise par cœur. »
- Théorème de Pythagore généralisé & toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est libre.
- Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E, $E = F \oplus F^{\perp}$.

29.1 Position et dispersion d'une variable aléatoire

Exercice 1 : Des boules.
On dispose d'une urne contenant initialement une seule boule noire. On effectue $N \in \mathbb{N}^*$ tirages suivant les modalités suivantes : si on tire une boule noire, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si on tire une boule blanche, on ne fait rien. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche et qui est égale à $N + 1$ si on n'obtient jamais de boule blanche.

1. Déterminer la loi de X_N.
2. Calculer les limites $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{E}[X_N]$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{V}[X_N]$, si elles existent.

Exercice 2 : Théorème de Stone-Weierstraß.
oit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Soit $x \in [0,1]$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli de paramètre x, indépendantes. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Calculer $B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$, puis remarquer que $x \mapsto B_n(x)$ est un polynôme.
2. Pour $\alpha > 0$, on note
$$\delta_\alpha = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid (x, y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x - y| \leq \alpha\}.$$
Montrer que $\lim_{\alpha\to 0} \delta_\alpha = 0$.
3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq \frac{\mathbb{V}[X_1]}{n\alpha^2}.$$
4. Montrer que $|B_n(x) - f(x)| \leq \delta_\alpha + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$, où $\alpha > 0$,
5. En déduire que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire que $\|B_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a ainsi démontré le *théorème de Stone-Weierstraß* : « toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynômiales ».

29.2 Espaces préhilbertiens réels

Exercice 3 : ℓ^2.
On considère l'espace vectoriel ℓ^2 des suites réelles positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < +\infty$, que l'on muni du produit scalaire

$$\langle u \mid v \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k.$$

1. Justifier que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bien défini — i.e. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$ existe pour $u, v \in \ell_2$.
2. Justifier que ℓ_2 est un espace vectoriel.
3. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un produit scalaire sur ℓ_2.

Exercice 4.
Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. On pose, pour $f, g \in E$:

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 5. ★
Soit $\mu :]0,1[\to \mathbb{R}_+^*$ continue, telle que $\int_{]0,1[} \mu < +\infty$. Soit, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) \mu(x) \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique famille $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ de polynômes telle que : P_i soit unitaire de degré i, et la famille $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynôme P_i admet i racines réelles simples dans $]0,1[$.

Semaine 30 : Espaces préhilbertiens réels

Questions de cours :

— Nada.

Exercice 1 : Distance à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

Exercice 2.
Calculer :

$$\inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \int_{-1}^{1} (P(x) - x^3)^2 \mathrm{d}x.$$

Exercice 3.
Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est qualifié d'*auto-adjoint* lorsque $\langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u(y)\rangle$.

1. Montrer que la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée est symétrique.
2. Montrer qu'un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si, et seulement si, p est auto-adjoint.

Exercice 4.
Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f, g des fonctions de E dans E telles que $\langle f(x) \mid y\rangle = \langle x \mid g(y)\rangle$ pour tout $x, y \in E$. Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 5.
Soient E un espace préhilbertien réel, $u \in E$ unitaire — i.e. $\|u\| = 1$ — et $k \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\varphi : (x, y) \mapsto \langle x \mid y\rangle + k\langle x \mid u\rangle\langle y \mid u\rangle$$

soit un produit scalaire sur E.

Exercice 6.
Soit E un espace euclidien. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $\langle x_i \mid x_j\rangle < 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$, alors $\dim(E) \geq n - 1$.

Exercice 7. ★
On travaille dans l'espace préhilbertien réel $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle \Pi_n \mid P \rangle = P(0)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Π_n est de degré n.
2. Existe-t-il un polynôme $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle \Pi \mid P \rangle = P(0)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$?

Exercice 8 : Polynômes de Legendre. ★
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$.

1. Quel est le degré de L_n ? Calculer L_0, L_1 et L_2.
2. Calculer $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$ lorsque $0 \leq k < n$.
3. Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

Semaine 31 : Séries

Questions de cours :

— Nada.

Exercice 1.

1. Déterminer la nature de la série
$$\sum \frac{1+\ln(n)}{n^2}.$$
2. Montrer que la série de terme général $(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$ est semi-convergente.

Exercice 2.

1. Déterminer la nature des séries suivantes :
$$\sum \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{e}}}, \qquad \sum \frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\lfloor n^{3/2}\rfloor+n}.$$
2. Même question, pour la série de terme général
$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3.

Déterminer la nature des séries suivantes :
$$\sum \sqrt{\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-1}, \qquad \sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right).$$

Exercice 4.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^2+(n-k)^2)^\alpha}.$$

Exercice 5.

Déterminer la nature de la série
$$\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right).$$

Exercice 6.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n}-1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, selon la valeur de u_0.
2. Étudier la nature de $\sum_n (-1)^n u_n$ selon la valeur de u_0.

Exercice 7.
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)^2}.$$

Exercice 8. ★
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n le n-ème entier naturel non-nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de '9'. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Exercice 9. ★
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*)$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 10. ★
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, telle que la série $\sum_n u_n$ converge, et telle que $u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer que pour tout $x \in [0, S]$, il existe une partie $A \subseteq \mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{n\in A} u_n = x.$$