Logique et preuves : élements de correction

remi.morvan@u-bordeaux.fr

10 novembre 2021

Exercice 1.4

Question 1. On a les tables de vérité suivantes.

P	Q	$P \to Q$	$\sim P$	$\sim P \vee Q$
v	v	v	f	v
f	v	v	v	v
v	f	f	f	f
f	f	v	v	v

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$
v	v	v	f	f	f	f
f	v	f	v	v	f	v
v	f	f	v	f	v	v
f	f	f	v	v	v	v

Ainsi, $P \to Q$ et $\sim P \vee Q$ sont équivalentes. Il en va de même pour $\sim(P \wedge Q)$ et $\sim P \vee \sim Q$.

Question 2. Par question 1, les formules $S \to R$ et $\sim S \vee R$ sont équivalentes. En effectuant la substitution $[S/P \wedge Q]$ on en déduit que $(P \wedge Q) \to R$ et $\sim(P \wedge Q) \vee R$ sont équivalentes. Cette dernière proposition, encore par question 1, est équivalente à $\sim P \vee \sim Q \vee R$, ou encore à $R \vee \sim P \vee \sim Q$. Ainsi, les formules $(P \wedge Q) \to R$ et $R \vee \sim P \vee \sim Q$ sont équivalentes.

Question 3. Il suffit d'utiliser deux fois de suite (une instance de) l'équivalence entre $P \to Q$ et $\sim P \vee Q$.

Question 4. Il faut utiliser l'équivalence entre $\sim(P \wedge Q)$ et $\sim P \vee \sim Q$.

Exercice 2.10

Prouvons le séquent $(((P \to Q) \to P) \to P) \to Q \vdash Q$.

1 Supposons $(((P \to Q) \to P) \to P) \to Q$ — but : Q
2 { Supposons $(P \to Q) \to P$ — but : P
3 { Supposons P — but : Q
4 { Supposons $(P \to Q) \to P$ — but : P
5 P [hyp 3]
6 }
7 $((P \to Q) \to P) \to P$ [$\to_i$ 4-6]
8 Q [mp 1, 7]
9 }
10 $P \to Q$ [$\to_i$ 3-9]
11 P [mp 2, 10]
12 }
13 $((P \to Q) \to P) \to P$ [$\to_i$ 2-12]
14 Q [mp 1, 13]

Et voilà !

Exercice 4.2 question 1

On souhaite montrer que la règle suivante n'est **pas** une règle dérivée de la logique minimale avec négation.

$$\frac{\Gamma \vdash {\sim}A \to B}{\Gamma \vdash {\sim}(A \to B)}\,\mathrm{R}$$

Si, par l'absurde, R était une règle dérivée (de la logique minimale avec négation), puisque l'on peut écrire la preuve suivante

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{{\sim}P, Q, {\sim}P \vdash Q}\,\mathrm{hyp}}{{\sim}P, Q \vdash {\sim}P \to Q}\,{\to_{\mathrm{i}}}}{{\sim}P, Q \vdash {\sim}(P \to Q)}\,\mathrm{R}$$

on en déduirait que ${\sim}P, Q \vdash {\sim}(P \to Q)$ est un séquent prouvable en (logique minimale avec négation). Par méta-théorème de correction (de la logique minimale avec négation), ce séquent devrait donc être valide, ce qui est faux : la valuation ν définie par $\nu(P) := \boldsymbol{f}$ et $\nu(Q) := \boldsymbol{v}$ satisfait les hypothèses du séquent, mais ne satisfait pas la conclusion : en effet, $\nu(P \to Q) = \boldsymbol{v}$ donc $\nu({\sim}(P \to Q)) = \boldsymbol{f}$. Contradiction. Ainsi, R n'est pas une règle dérivée (de la logique minimale avec négation).

Remarque

Pourquoi avoir pris $\Gamma = \{{\sim}P, Q\}$ et $A = {\sim}P$ et $B = Q$? Parce qu'en écrivant la table de vérité des propositions ${\sim}A \to B$ et ${\sim}(A \to B)$, on s'est rendu compte que si A faux et B vrai alors ${\sim}A \to B$ est vrai, mais ${\sim}(A \to B)$ est faux. Comment forcer à ce que A soit faux et B vrai ? En prenant comme propositions des variables propositionnelles (P et Q, respectivement), et en « encodant » leur valeur de vérité dans Γ : d'où le choix de $\Gamma = \{{\sim}P, Q\}$.

Remarque bis

En écrivant la même table de vérité, on se rend compte que si A est vrai et B est vrai, alors on a encore un contre-exemple, i.e. on aurait aussi pu prendre $\Gamma = \{P, Q\}$ et $A = P$ et $B = Q$. En fait, $\Gamma = \{Q\}$ aurait même suffit.

Exercice 5.1 question 2

Preuve arborescente

On souhaite prouver le séquent $\vdash {\sim}(P \wedge Q) \leftrightarrow {\sim}P \vee {\sim}Q$ en logique classique. La conclusion du séquent étant une équivalence (proposition de la forme $A \leftrightarrow B$), on découpe la preuve en deux (une preuve $A \to B$ et une de $B \to A$ avec le même contexte).

Soit π_1 la preuve suivante, dans laquelle on a posé $\Gamma = \{{\sim}P \vee {\sim}Q, P \wedge Q\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\text{hyp} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, {\sim}P \vdash {\sim}P}\,\text{hyp} \quad \dfrac{}{\Gamma, {\sim}P \vdash P}\,\text{hyp}}{\Gamma, {\sim}P \vdash \bot}\,\text{abs} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, {\sim}Q \vdash {\sim}Q}\,\text{hyp} \quad \dfrac{}{\Gamma, {\sim}Q \vdash Q}\,\text{hyp}}{\Gamma, {\sim}Q \vdash \bot}\,\text{abs}}{{\sim}P \vee {\sim}Q, P \wedge Q \vdash \bot}\,\vee_e}{{\sim}P \vee {\sim}Q \vdash {\sim}(P \wedge Q)}\,\to_i}{\vdash {\sim}P \vee {\sim}Q \to {\sim}(P \wedge Q)}\,\to_i$$

Soit π_2 la preuve suivante, où $\Delta = \{{\sim}(P \wedge Q), P\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{{\sim}(P \wedge Q) \vdash P \vee {\sim}P}\,\text{exm} \qquad \begin{matrix}\pi_3 \\ \vdots \\ {\sim}(P \wedge Q), P \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{}{{\sim}(P \wedge Q), {\sim}P \vdash {\sim}P}\,\text{hyp}}{{\sim}(P \wedge Q), {\sim}P \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\vee_{i,1}}{{\sim}(P \wedge Q) \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\vee_e}{\vdash {\sim}(P \wedge Q) \to {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\to_i$$

où π_3 est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash Q \vee {\sim}Q}\,\text{exm} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta, Q \vdash P}\,\text{hyp} \quad \dfrac{}{\Delta, Q \vdash Q}\,\text{hyp}}{\Delta, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i \quad \dfrac{}{\Delta, {\sim}Q \vdash {\sim}(P \wedge Q)}\,\text{hyp}}{\Delta, Q \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\text{abs} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta, {\sim}Q \vdash {\sim}Q}\,\text{hyp}}{\Delta, {\sim}Q \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\vee_{i,2}}{{\sim}(P \wedge Q), P \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q}\,\vee_e$$

On peut alors facilement obtenir une preuve de $\vdash {\sim}(P \wedge Q) \leftrightarrow {\sim}P \vee {\sim}Q$ depuis π_1 et π_2 !

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_2 \\ \vdots \\ \vdash {\sim}(P \wedge Q) \to {\sim}P \vee {\sim}Q\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash {\sim}P \vee {\sim}Q \to {\sim}(P \wedge Q)\end{matrix}}{\vdash {\sim}P \vee {\sim}Q \leftrightarrow {\sim}(P \wedge Q)}\,\wedge_i$$

Explication de la preuve π_2

La preuve π_2 peut se comprendre ainsi : pour montrer que ${\sim}P \vee {\sim}Q$ sous l'hypothèse ${\sim}(P \wedge Q)$, on a trois cas possibles :

- P est faux, auquel cas ${\sim}P$ et donc ${\sim}P \vee {\sim}Q$ sont vraies ;
- Q et faux, auquel cas ${\sim}Q$ et donc ${\sim}P \vee {\sim}Q$ sont vraies ;

– P et Q sont vraies, donc $P \land Q$ est vrai, ce qui contredit l'hypothèse $\sim(P \land Q)$.

On remarque que dans le raisonnement précédent, on fait une disjonction de cas sur la valeur de vérité de P et de Q, ce qui correspond aux deux instances de la règle du tiers-exclus dans la preuve π_2.

Preuve linéaire

```
1   {                                                  but : ~(P ∧ Q) → ~P ∨ ~Q
2       Supposons ~(P ∧ Q)                             but : ~P ∨ ~Q
3       P ∨ ~P [exm]
4       {
5           Supposons P
6           Q ∨ ~Q [exm]
7           {
8               Supposons Q
9               P ∧ Q [∧i 5, 8]
10              ~P ∨ ~Q [abs 2, 9]
11          }
12          {
13              Supposons ~Q
14              ~P ∨ ~Q [∨i,2]
15          }
16          ~P ∨ ~Q [∨e 6, 7-11, 12-15]
17      }
18      {
19          Supposons ~P
20          ~P ∨ ~Q [∨i,1 19]
21      }
22      ~P ∨ ~Q ∨e 3, 4-17, 18-21
23  }
24  ~(P ∧ Q) → ~P ∨ ~Q [→i 1-23]
25  {                                                  but : ~P ∨ ~Q → ~(P ∧ Q)
26      Supposons ~P ∨ ~Q                              but : ~(P ∧ Q)
27      {
28          Supposons P ∧ Q                            but : ⊥
29          ~P ∨ ~Q [hyp 26]
30          {
31              Supposons ~P
32              P [∧e,1 28]
33              ⊥ [mp 31, 32]
34          }
35          {
36              Supposons ~Q
37              Q [∧e,2 28]
38              ⊥ [mp 36, 37]
39          }
40          ⊥ [∨e 29, 30-34, 35-39]
41      }
42      ~(P ∧ Q) [→i 27-41]
43  }
44  ~P ∨ ~Q → ~(P ∧ Q) [→i 25-43]
45  ~(P ∧ Q) ↔ ~P ∨ ~Q [∧i 24, 44]
```